

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a IX-a – tehnologic și servicii**

1. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică. Știind că  $a_1 > 0, r > 0$ . Să se arate că

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \geq 2.$$

2. a) Să se rezolve ecuația  $\left[ \frac{x+1}{2} \right] = \frac{x+2}{3}$ .

- b) Să se demonstreze inegalitatea:  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ .

3. a) Fie  $ABC$  un triunghi și punctele  $M \in AB, N \in AC$  și  $P \in BC$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$  și  $P$  mijlocul segmentului  $[BC]$ . Să se afle suma  $a + b$ , unde  $\overrightarrow{AP} = a \overrightarrow{AM} + b \overrightarrow{AN}$ .

- b) Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A_1 B_1 C_1$  având centrele de greutate  $G$  respectiv  $G_1$ . Să se arate că  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3 \overrightarrow{GG_1}$ .

4. Se consideră un pătrat având perimetrul  $P_1$ . Pornind de la acest pătrat construim un șir de  $n$  pătrate,  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel, al doilea pătrat de perimetru  $P_2$  este pătratul care are ca vârfuri mijloacele laturilor pătratului inițial, al treilea pătrat este pătratul de perimetru  $P_3$ , care are ca vârfuri mijloacele laturilor celui de-al doilea pătrat, ș.a.m.d.

- a) Arătați că  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este o progresie geometrică de rație  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- b) Al câtelea pătrat are perimetrul egal cu o optime din perimetrul primului pătrat?

- c) Dacă primul pătrat are perimetrul egal cu 10, câte dintre primele 2013 pătrate au perimetrele numere raționale?

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a X-a – tehnologic și servicii**

1. Să se arate că numărul  $a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5 + 2\sqrt{6}}$  este număr natural.
2.
  - a) Să se calculeze  $A = \lg(2 - \sqrt{3}) + \lg(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \lg(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \lg(2 + \sqrt{3})$ .
  - b) Dacă  $a, b \in (0, 1)$ , să se demonstreze inegalitatea:  $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$ .
3.
  - a) Să se determine  $z \in \mathbb{C}$  dacă  $2\bar{z} + z = 3 + 4i$ .
  - b) Să se determine  $z \in \mathbb{C}$ , care verifică egalitatea  $|z - 3i|^2 = 2|z|^2 + 18$ .
4. Să se arate că  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapă locală - 16 februarie 2013****Clasa a XI-a – tehnologic și servicii**

1. Se consideră matricea  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Să se arate că există  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $A^2 = aA$ .
  - b) Să se calculeze  $(A - {}^t A)^{2013}$ .
2.
  - a) Să se demonstreze că  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$  pentru orice matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .
  - b) Pentru orice matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , notăm cu  $Tr(A)$  suma elementelor de pe diagonala principală, iar cu  ${}^t A$ , transpusa sa. Să se arate că oricare ar fi  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , avem  $Tr(A {}^t A) \geq 0$ .
3. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A_n(n, n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Să se scrie ecuația dreptei  $A_0A_1$ .
  - b) Să se arate că toate punctele  $A_n$  sunt coliniare.
  - c) Să se demonstreze că aria triunghiului  $OA_nA_{n+1}$  nu depinde de  $n$ .
4.
  - a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ .
  - b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 5x + 7} + x \right)$ .
  - c) Să se determine asimptota spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”**  
**Etapă locală - 16 februarie 2013**

**Clasa a XII-a – tehnologic și servicii**

1. Pe  $(6, \infty)$  definim legea " $\circ$ " prin relația  $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in (6, \infty)$ .
  - a) Să se determine elementul neutru al legii și elementele simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ".
  - b) Să se determine  $x \in (6, \infty)$  pentru care  $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{2013} = x$ .
  - c) Să se arate că funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow (6, \infty), f(x) = x + 6$  este izomorfism între grupurile  $((0, \infty), \cdot)$  și  $((6, \infty), \circ)$ .
  
2. În mulțimea  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X(a) | X(a) = I_2 + aA, a > -1\}$ .
  - a) Să se arate că  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab), \forall a, b > -1$ ;
  - b) Să se arate că  $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X((n+1)! - 1)$ .
  
3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ .
  - a) Să se arate că funcția dată admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
  - b) Să se determine o primitivă  $F$  a lui  $f$ .
  
4. Să se calculeze:
  - a)  $\int \sqrt{x^2 + 3} dx, x \in \mathbb{R}$ .
  - b)  $\int \frac{e^{\arctg x} + x \ln(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.